TÍTULO: ***Vectores.***

OBJETIVOS:

- Introducir/recordar los conceptos de magnitudes escalares y vectoriales.
- Introducir/recordar los conceptos de vectores en el espacio de tres dimensiones, su definición por componentes y su utilidad en Física.
- Introducir/recordar las operaciones principales con vectores: suma, multiplicación por un escalar, producto escalar y producto vectorial.

DESARROLLO CONCEPTUAL

CONCEPTOS GENERALES

Necesidad de los vectores en Física

Existen muchas magnitudes en Física que, para que estén bien determinadas, no basta con dar un valor numérico que indique su intensidad. Como ejemplo, baste pensar en una fuerza: para que esté bien determinada no basta con especificar su intensidad (número de newtons que le corresponde), sino que es necesario indicar en qué dirección actúa (es decir, la ecuación de la recta a lo largo de la cuál actúa) y en qué sentido (a lo largo de la recta, podría actuar en dos sentidos opuestos). Otro ejemplo: Si queremos especificar completamente la velocidad de un móvil, no basta con decir que es, por ejemplo, 10 metros por segundo, sino que es necesario decir en qué dirección y sentido se dirige el móvil. Todas las magnitudes físicas que tienen estas características -dirección y sentido- (por ejemplo, posición, velocidad, aceleración, fuerza, etc.) se representan a través de vectores y se dice que son *magnitudes vectoriales*, mientras que aquéllas otras que quedan completamente determinadas con especificar su valor (por ejemplo, temperatura, densidad, energía, etc.) se dice que son *magnitudes escalares*.

¿Qué es un vector?

La representación más elemental de un vector es un *segmento orientado* (con un origen, O, y un extremo, P, bien especificados) cuya longitud es proporcional a la intensidad de la magnitud que representa. Cuando se quiere especificar que una magnitud es vectorial se indica colocando una pequeña flecha sobre el símbolo de la magnitud, tal como se indica en la Figura 1.

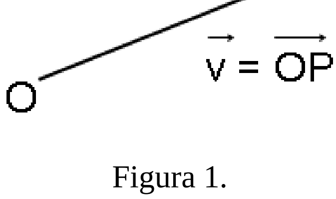

Figura 1.

¿Cuáles son las características de un vector?
Un vector tiene cuatro características fundamentales:

Punto de aplicación: Es el punto del espacio en el que está el origen del vector.
Dirección: La de la recta que une el origen y el extremo.
Sentido: El indicado por el origen y el extremo.
Módulo: El valor numérico asociado a su longitud.

¿Cómo se representa matemáticamente un vector?
Dado que un vector es, básicamente, un segmento con un origen y un extremo, la representación matemática del vector tiene que venir dada por las coordenadas del extremo y las del origen. Por otro lado, los puntos origen y extremo están matemáticamente determinados por sus coordenadas cartesianas, de manera que si el punto O tiene coordenadas (x_0, y_0, z_0) y el punto P (x_1, y_1, z_1), el vector que une dichos puntos tiene como proyecciones sobre los ejes de coordenadas tres segmentos de longitudes $v_x = x_1 - x_0$, $v_y = y_1 - y_0$, $v_z = z_1 - z_0$, respectivamente, tal como se puede observar en la Figura 2.

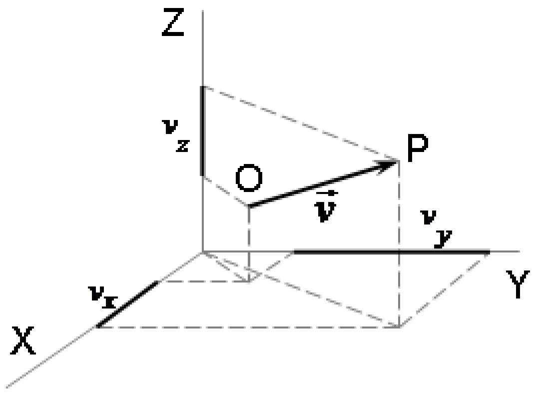

Figura 2.

Estas proyecciones del vector sobre los ejes de coordenadas son lo que se denominan *componentes cartesianas* del vector. Por lo tanto, un vector queda completamente determinado si se especifican su punto de aplicación y sus componentes cartesianas. Habitualmente se utiliza la notación

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

Un tipo particularmente interesante de vectores son los denominados vectores unitarios, que son aquellos cuyo módulo vale la unidad. Por ejemplo, dado un vector $\vec{v}$ cuyo módulo es

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \ ,$$

Siempre se puede definir un vector unitario, que a veces se indica cambiando la flecha de vector por un acento circunflejo, como

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Por lo tanto, este vector unitario $\hat{v}$ tiene la misma dirección que $\vec{v}$ pero módulo unidad. Los vectores unitarios que señalan las direcciones de los ejes de coordenadas son particularmente útiles. Estos vectores unitarios se representan habitualmente por los símbolos $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, para los vectores unitarios en las direcciones de los ejes X, Y, Z, respectivamente.

OPERACIONES CON VECTORES

Suma de vectores.
Volviendo a la representación gráfica de los vectores como segmentos orientados, parece intuitivo que la manera de sumar vectores es poner unos a continuación de otros, de manera que *el vector suma de otros dos vectores es la diagonal del paralelogramo que definen ambos* (ver figura 3).

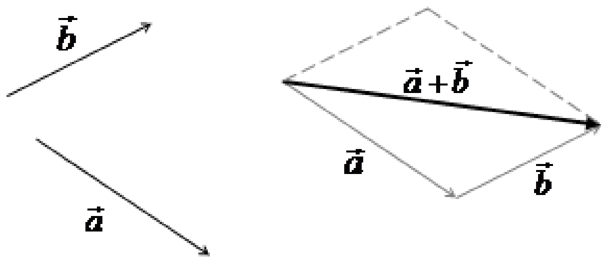

Figura 3.

En esta figura se puede apreciar directamente que la suma de vectores cumple la *propiedad conmutativa*, es decir

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

En la notación por componentes, el vector suma de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es

$$\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}=\left(a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z\right)$$

Es decir, los vectores se suman componente a componente.

Producto de un vector por un escalar
Utilizando otra vez la representación geométrica, es fácil darse cuenta de que el producto de un escalar por un vector es otro vector de la misma dirección y sentido que el primero y con un módulo igual al del primer vector multiplicado por el escalar, es decir:

$$\lambda\vec{v}=\left(\lambda v_x, \lambda v_y, \lambda v_z\right)$$

$$|\lambda\vec{v}|=\sqrt{\lambda^2 v_x^2+\lambda^2 v_y^2+\lambda^2 v_z^2}=\lambda\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\begin{cases}\lambda|\vec{v}|; \lambda>0\\ -\lambda|\vec{v}|; \lambda<0\end{cases}$$

Representación de un vector por medio de sus componentes y los vectores unitarios.
La suma de vectores y el producto de un vector por un escalar nos permiten definir una nueva manera de representar matemáticamente un vector en términos de sus componentes y los vectores unitarios, de la siguiente forma

$$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}$$

En esta notación la suma de dos vectores es

$$\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}=\left(a_x+b_x\right)\vec{i}+\left(a_y+b_y\right)\vec{j}+\left(a_z+b_z\right)\vec{k}$$

Producto escalar de dos vectores

El producto escalar de dos vectores es una operación que da como resultado un escalar que es igual al producto del módulo de uno de los vectores por la proyección del segundo vector sobre el primero. Se suele indicar con un punto. Es decir, si se tienen los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, que forman entre sí un ángulo α, el producto escalar de los dos vectores será:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$$

El producto escalar tiene varias propiedades interesantes:

i) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$, o lo que es lo mismo $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=(\vec{a}\cdot\vec{a})^{1/2}$

ii) $\vec{a}\cdot\vec{i}=a_x$; $\vec{a}\cdot\vec{j}=a_y$; $\vec{a}\cdot\vec{k}=a_z$

iii) Si dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son mutuamente perpendiculares entonces $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

iv) $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

v) Permite hallar fácilmente el ángulo que forman dos vectores: $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

Producto vectorial de dos vectores

El producto vectorial de dos vectores es una operación que da como resultado otro vector, cuyo módulo es igual al producto de los módulos de los dos vectores por el seno del ángulo que forman, la dirección es la de la recta perpendicular al plano que contiene a los dos vectores y el sentido el de avance de un sacacorchos que gira llevando al primer vector hacia el segundo. Se suele indicar con un aspa. Es decir, si se tienen los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, que forman entre sí un ángulo α, el producto escalar de los dos vectores será:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\operatorname{sen}\alpha$$

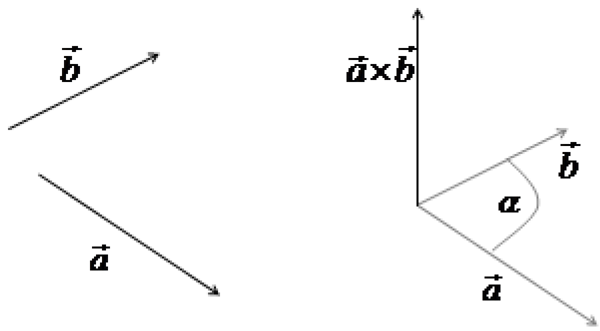

Figura 4.

El producto vectorial tiene varias propiedades interesantes:

i) $\vec{a}\times\vec{a}=0$.

ii) Si dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos entre sí, entonces $\vec{a}\times\vec{b}=0$.

iii) El producto vectorial no es conmutativo: $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

iii) $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$; $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$; $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$; $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$; $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$; $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$

iv) $\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$.

v) El módulo del producto vectorial de dos vectores es igual al área del paralelogramo que definen dichos vectores.

EJEMPLOS DE VECTORES EN LA MECÁNICA

Vector de Posición

Se utiliza para determinar la posición de un objeto cualquiera en un determinado sistema de referencia. Es decir, si un objeto se encuentra en un punto del espacio P, cuyas coordenadas en un cierto sistema de referencia son (x, y, z), el vector de posición de dicho punto en dicho sistema de referencia será (Figura 5),

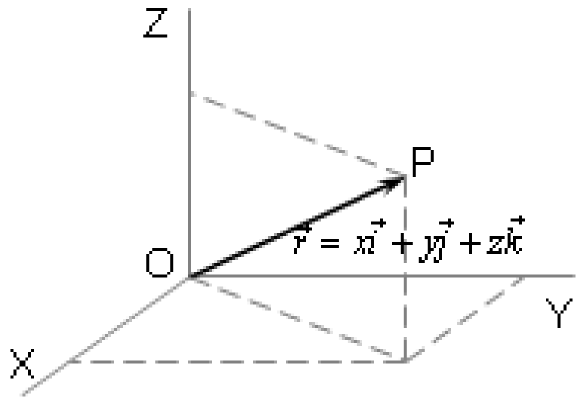

Figura 5.

Vector velocidad

Para un móvil que se desplaza siguiendo una cierta trayectoria, la forma más sencilla de describir matemáticamente esa trayectoria es a través de los diferentes valores que toman las componentes de su vector de posición a lo largo del tiempo. Por lo tanto, las coordenadas que dan la posición del móvil son tres funciones de una variable, que representa el tiempo y que denotaremos por *t*, es decir, $(x(t), y(t), z(t))$.

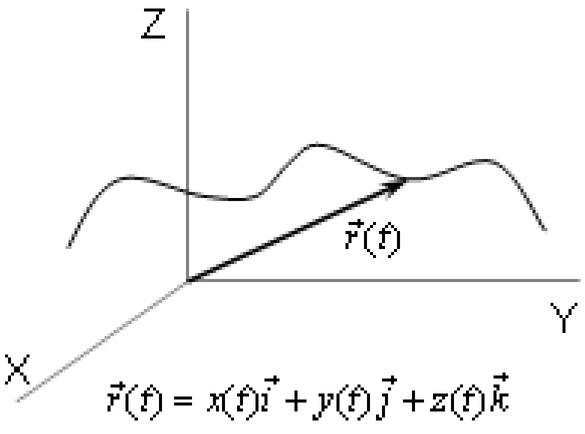

Figura 6.

El vector velocidad se define como la derivada del vector de posición respecto al tiempo, es decir

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

Vector aceleración

Análogamente al caso anterior, se define el vector aceleración como la derivada respecto al tiempo del vector velocidad, es decir

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k}$$

Vector cantidad de movimiento o momento lineal.

Una magnitud muy importante en Mecánica es la cantidad de movimiento de un móvil, que es el producto de la masa del móvil, *m*, por el vector velocidad del móvil, es decir

$$\vec{p}(t) = m\vec{v}(t) = m\frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + m\frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + m\frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

EJEMPLO

ENUNCIADO

Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, y $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$, calcular el ángulo que forman y el área del paralelogramo que determinan.

RESOLUCIÓN

Para hallar el ángulo que forman basta con calcular su coseno a partir de la fórmula del producto escalar, es decir

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} = \frac{2-4+6}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = \frac{4}{7\sqrt{6}},$$

de manera que $\alpha = \arccos\left(\frac{4}{7\sqrt{6}}\right)$.

Por otro lado, el área que nos piden es el módulo del producto vectorial de los dos vectores, es decir

$$S = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\operatorname{sen}\alpha = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sqrt{1-\cos^2\alpha} =$$

$$= |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sqrt{1-\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}\right)^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2} = \sqrt{14\times 21 - 16} = \sqrt{278}$$

En el caso de que se dijese que las componentes de los vectores tienen unas unidades determinadas, la unidad en las que se mediría ese área sería el producto de las unidades de las componentes de los vectores $\vec{a}$, y $\vec{b}$.

EJERCICIO DE AUTOCOMPROBACIÓN

ENUNCIADO

Una carga eléctrica se mueve con una velocidad $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ en el seno de un campo magnético $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, estando la velocidad y el campo magnético expresados en unas determinadas unidades. Hallar la fuerza por unidad de carga F/q, que el campo magnético ejerce sobre la carga móvil, sabiendo que, según la fórmula de Lorentz, dicha fuerza por unidad de carga es igual al producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$.

RESULTADO

$$F/q = \vec{v} \times \vec{B} = -5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$$

REFERENCIAS:

- P. A. Tipler y G. Mosca, Física para la Ciencia y la Tecnología, 5ª Edición, Editorial Reverté, 2005.

AUTOR:

- Miguel Ángel Rubio Álvarez